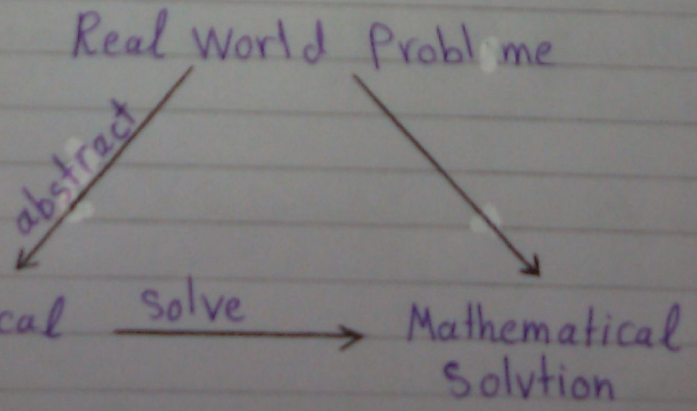
* المعادلات التفاضلية العادية:
Ordinary Differential equation:

- كما هو معلوم إن المهندس الميكانيكي يهتم بدراسة النظم الميكانيكية ولهذا يجب في دراسته على استخدام المفاهيم الرياضية لتحديد خصائص النظام الذي هو قيد الدراسة ولكن من غير الممكن استخدام هذه المفاهيم الرياضية مباشرة دون أن نقوم بتوصيف الحالة (المسألة) التي هي قيد الدراسة على شكل نموذج رياضي إلا أنه من خلال الدراسة تصادفنا غالباً علاقة تربط كميات متغيرة فيما بينها مثل تغير المسافة بالنسبة للزمن أو تغير السرعة بالنسبة للزمن أو تغير درجة الحرارة من مكان لآخر بالنسبة للوضع وهكذا وبما أن التغيير يمكن التعبير عنه رياضياً بالاعتماد على مفهوم الاشتقاق فغالباً ما تؤول هذه النماذج الرياضية إلى معادلات تحتوي على متحول مستقل والتابع لهذا المتحول ومشتقاته مثل هذه المعادلات تسمى بالمعادلات التفاضلية وهي موضوعنا الأهم في هذا المقرر.



Scanned by CamScanner

تعريف: المعادلة التفاضلية:

- هي علاقة تربط بين متحول مستقل أو أكثر بتابع ومشتقاته، وغالباً ما نعبر عنها رياضياً على الشكل التالي:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

وهذه المعادلة تسمى عادة بالمعادلة التفاضلية العادية.

← إذا كان عدد المتحولات المستقلة أكثر من متحول واحد، ولتكن x, y متحولان مستقلان وكان $z(x,y)$ تابعاً قابلاً للاشتقاق بالنسبة لكل من x و y جزئياً نسمي عندئذ المعادلة التي تحوي المتحولات المستقلة والتابع ومشتقاته الجزئية بـ « المعادلة التفاضلية الجزئية »، وهي من الشكل:

$$G\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots\right) = 0$$

على سبيل المثال:

المعادلات التفاضلية:

$$y'''^2 + 2y'^3 - 5y = \sin x \quad [1]$$

$$y' + xy = x^2 \quad [2]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad [3]$$

نلاحظ أن المعادلتين [1] و [2] معادلات تفاضلية عادية بينما [3] معادلة تفاضلية جزئية.

تعريف: * رتبة المعادلات التفاضلية:

- هي رتبة أعلى مشتق في المعادلة.

* درجة المعادلة التفاضلية:

هي أس (قوة) أعلى مشتق في المعادلة بحيث تكون جميع المشتقات خالية من القوى الكسرية.

Scanned by CamScanner

مثال: أوجد مرتبة ودرجة المعادلة التفاضلية:

$$y'' = (5 - 2y')^{\frac{3}{2}}$$

$$y'' = \sqrt[2]{(5-2y')^3} \Rightarrow y''^2 = (5-2y')^3$$

الحل:

المعادلة من المرتبة الثانية والدرجة الثانية.

* حَلّ المعادلة التفاضلية: Solution of ODE

نسمي التابع $y = y(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

إذا كان:

1) التابع يقبل الاشتقاق (n) مرة.
2) يحقق المعادلة التفاضلية

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

مثال: أثبت أن $y(x) = c \cdot \sin(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$

حيث (c) ثابت عددي

$$y = c\sin(x) \quad , \quad y' = c\cdot\cos(x) \quad , \quad y'' = -c\sin(x)$$

$$y'' + y = -c\sin x + c\sin x = 0$$

الحل:

* الحل العام والحل الخاص General solution and particulare solution

الحل العام لمعادلة تفاضلية من المرتبة n:

هو حل يحتوي على (n) من الثوابت الاختيارية وبالطبع يحقق المعادلة التفاضلية المعطاة. أما الحل الخاص هو أي حل يحقق المعادلة التفاضلية ولا يحتوي أي ثوابت اختيارية وقد نحصل عليه أحياناً بالتعويض عن الثوابت الاختيارية في الحل العام بقيم محددة.

Scanned by CamScanner

الحل العام للمعادلة $y'' - 5y' + 6y = 0$ يكون:

الحل الخاص ⟸

$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$

$y = e^{2x} + e^{3x}$

$y = 3 + 5e^{3x}$

$y = 5 - 2e^{3x}$

* تكوين المعادلة التفاضلية (حذف الثوابت):

- إذا أعطينا الحل العام لمعادلة تفاضلية من المرتبة (n) فإنه لإيجاد الحل يعتمد على (n) من الثوابت الاختيارية فيكون على الشكل:

$$F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \quad \textcircled{*}$$

حيث C_1 و C_2 و C_n ثوابت اختيارية، للحصول على المعادلة التفاضلية للحل المعطى نشتق معادلة $\textcircled{*}$ n مرة فيكون لدينا (n+1) من المعادلات وعندئذ يمكن حذف الثوابت الاختيارية وعددها نحصل على المعادلة التفاضلية المطلوبة

مثال 1 أوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام $y = C \sin x$

الحل: ملاحظة: حسب عدد الثوابت نشتق، ولدينا ثابت واحد نشتق مرة واحدة

حذف الثوابت:

$y' = C\cos x \quad , \quad C = \frac{y}{\sin x} \cos x$

$y' = y \cot g$

مثال 2 أوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام حيث C_1 و C_2 ثابتان اختياريان $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ (وظيفة)

Scanned by CamScanner